Studiengang: DIBau-Wiener Neustadt-1103

Formelsammlung Mathematik

Prof. Mag. Martin Schilk

April 2012

Inhaltsverzeichnis

I. Funktionen & Gleichungen

1) Potenzen, Potenzfunktion, Wurzelfunktion, Wurzelgleichung

$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \;\; (n Faktoren)$; $a^0 = 1$; $a^1 = a$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$; $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \; (a > 0)$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$; $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$; $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $\qquad a \neq 0, b \neq 0$

$a^m \pm a^n = \ldots$ *(kein Rechengesetz für $m \neq n$!)* ; $a^m \cdot b^n = \ldots$ *(kein Rechengesetz für $a \neq b$ und $m \neq n$!)*

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b + b^2$; $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 \pm b^3$; … (Pascal'sches Dreieck)

Wurzelgleichungen: „Wurzel isolieren" – Quadrieren – Probe!

Potenzfunktion: Beispiel $f: y = x^2$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$

– Umkehrfunktion: Wurzelfunktion(en): $f_1^{-1}: y = \sqrt{x}$, $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ und $f_2^{-1}: y = -\sqrt{x}$, $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^-$

2) Quadratische Funktion, Quadratische Gleichung

$f: y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, Graph: Parabel $\qquad a \neq 0$

$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$, ${}_1x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$ $\qquad$ *2, 1, 0 Lösungen $\in \mathbb{R}$*

$x^2 + p \cdot x + q = 0$, ${}_1x_2 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

Satz von Vieta: $x_1 + x_2 = -p = -\frac{b}{a}$; $x_1 \cdot x_2 = q = \frac{c}{a}$

$x^2 + p \cdot x + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$; $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

3) Exponentialfunktionen & -gleichungen, Logarithmusfunktionen & -gleichungen

Der Logarithmus von b zur Basis a ist jener Exponent x, mit dem man a potenzieren muss, um b zu erhalten:

$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a(b) = \frac{\ln(b)}{\ln(a)} = \frac{\lg(b)}{\lg(a)}$, wobei $a > 0, a \neq 1, b > 0$

$e^x = b \Leftrightarrow x = \ln(b)$ … natürlicher Logarithmus $\boxed{\text{LN}}$; Euler'sche Zahl $e = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.71828182846$

$10^x = b \Leftrightarrow x = \lg(b)$ … dekadischer Logarithmus $\boxed{\text{LOG}}$

Rechengesetze für Logarithmen:

$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$; $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$; $\log(a^n) = n \cdot \log(a)$; $\log(a \pm b) = \ldots$ *(kein Rechengesetz!)*

Natürliche Exp.fkt.: $f: y = e^x$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ – Natürliche Logarithmusfunktion: $f^{-1}: y = \ln(x)$, $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

Dekadische Exp.fkt.: $f: y = 10^x$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ – Dekadische Logarithmusfunktion: $f^{-1}: y = \lg(x)$, $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

Allgemeine Exp.fkt.: $f: y = a^x$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $a > 0, a \neq 1$ – Allg. Log.fkt.: $f^{-1}: y = \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$, $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

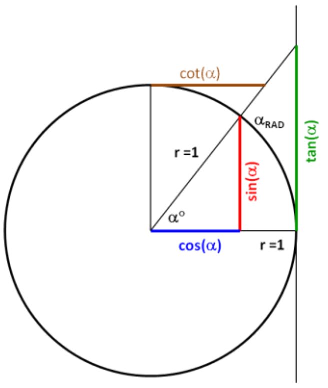
Exponentialgleichungen (Unbekannte im Exponent): beidseitig Logarithmieren (Rechengesetze!)

Logarithmusgleichungen: Logarithmus eines Therms (Rechengesetze!) oder Zahl – „Entlogarithmieren"

4) Kreisfunktionen (Winkelfunktionen), Arkusfunktionen, goniometrische Gleichungen

Winkelmaß (Degree, DEG) – Bogenmaß (Radian, RAD):

$$\alpha° = \alpha_{RAD} \cdot \frac{180°}{\pi}; \quad \alpha_{RAD} = \alpha° \cdot \frac{\pi}{180°}$$



$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \qquad \textit{Schreibweise}: \sin^2(\alpha) = (\sin(\alpha))^2$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}; \text{ Kotangens } \cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)};$$

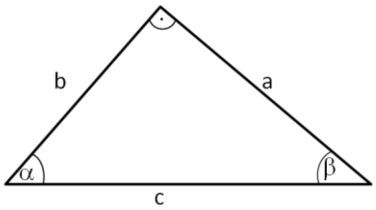
Sekans $\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}$; Kosekans $\csc(\alpha) = \frac{1}{\sin(\alpha)}$

1. Summensatz:

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$, speziell: $\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta)$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$, speziell: $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$

Trigonometrie des rechtwinkeligen Dreiecks:



$$c^2 = a^2 + b^2; \quad A = \frac{a \cdot b}{2}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}, \quad \sin(\beta) = \frac{b}{c} \qquad \textit{Sinus} \ldots \frac{\textit{Gegenkathete}}{\textit{Hypotenuse}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c}, \quad \cos(\beta) = \frac{a}{c} \qquad \textit{Kosinus} \ldots \frac{\textit{Ankathete}}{\textit{Hypotenuse}}$$

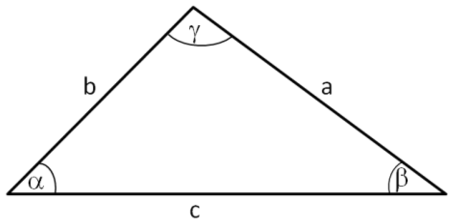
$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b}, \quad \tan(\beta) = \frac{b}{a} \qquad \textit{Tangens} \ldots \frac{\textit{Gegenkathete}}{\textit{Ankathete}}$$

Trigonometrie des allgemeinen Dreiecks:

Sinussatz (WSW, SsW): $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$

Kosinussatz (SWS, SSS): $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$

$$\gamma = acs\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}\right)$$



$$A = \frac{a \cdot b}{2} \cdot \sin(\gamma) = \frac{b \cdot c}{2} \cdot \sin(\alpha) = \frac{c \cdot a}{2} \cdot \sin(\beta)$$

Sinus: $f: y=\sin(x)$, $\mathbb{R}\to[-1\,;\,1]$ – Arkussinus: $f^{-1}: y=asn(x)=\arcsin(x)$, $[-1\,;\,1]\to\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

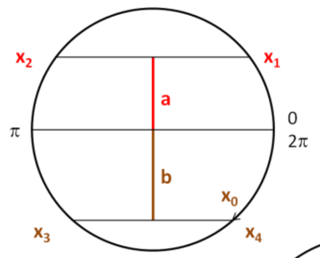
Kosinus: $f: y=\cos(x)$, $\mathbb{R}\to[-1\,;\,1]$ – Arkuskosinus: $f^{-1}: y=acs(x)=\arccos(x)$, $[-1\,;\,1]\to[0;\,\pi]$

Tangens: $f: y=\tan(x)$, $\mathbb{R}\backslash(2n-1)\cdot\frac{\pi}{2}\to\mathbb{R}$ – Arkustangens: $f^{-1}: y=atn(x)=\arctan(x)$, $\mathbb{R}\to\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

Arkusfunktionen (beim Lösen goniometrischer Gleichungen): **2 Werte in [0 ; 2π]**

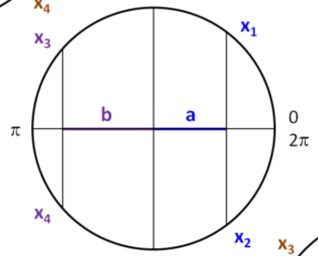
$x_1 = asn(a)$, $x_2 = \pi - x_1$

$x_0 = asn(b) < 0$, $x_3 = \pi + |x_0|$, $x_4 = 2\pi - |x_0|$



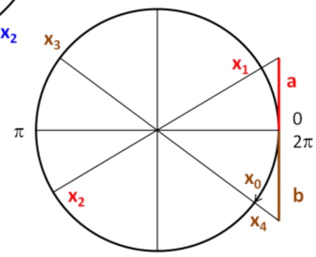
$x_1 = acs(a)$, $x_2 = 2\pi - x_1$

$x_3 = acs(b)$, $x_4 = 2\pi - x_3$



$x_1 = atn(a)$, $x_2 = \pi + x_1$

$x_0 = atn(b) < 0$, $x_3 = \pi - |x_0|$, $x_4 = 2\pi - |x_0|$



Allgemeine Sinusfunktion (harmonische Schwingung):

$f: y=a\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi)$ a…Amplitude; ω…(Kreis)Frequenz; φ…Nullphasenwinkel

$T=\frac{2\pi}{\omega}$ …Periode(ndauer); $t_0=-\frac{\varphi}{\omega}$ …waagrechte Verschiebung *(Nullstelle)*

Es gilt: $f: y=a\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi)=a\cdot\cos\left(\omega\cdot t+\varphi-\frac{\pi}{2}\right)$; speziell: $f: y=\sin(t)=\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$

Addition von Sinusschwingungen gleicher Frequenz:
ergibt Sinusschwingung mit derselben Frequenz

$a_1\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi_1)+a_2\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi_2)=a\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi)$ wobei $a=\sqrt{a_1^2+a_2^2+2\cdot a_1\cdot a_2\cdot\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$

$$\varphi=atn\left(\frac{a_1\cdot\sin(\varphi_1)+a_2\cdot\sin(\varphi_2)}{a_1\cdot\cos(\varphi_1)+a_2\cdot\cos(\varphi_2)}\right)$$

Addition von Sinusschwingungen ungleicher Frequenz:
ergibt eine periodische Funktion (keine Sinusfunktion!), wenn das Verhältnis $\omega_1:\omega_2$ eine rationale Zahl ist.
Schwebung: ähnliche (leicht unterschiedliche) Frequenzen

Multiplikation von Sinusschwingungen gleicher Frequenz:
ergibt eine periodische Funktion, deren Periode halb so groß wie jener der Ursprungsfunktionen ist.

Multiplikation von Sinusschwingungen ungleicher Frequenz:
Schwingung mit „schwingende Amplitude"
Amplitudenmodulation: $f: y=(a+\Delta a\cdot\sin(\omega_1\cdot t))\cdot\sin(\omega_2\cdot t)$

5) Hyperbelfunktionen, Areafunktionen

$$\cosh^2(\alpha)-\sinh^2(\alpha)=1$$

$$\tanh(\alpha)=\frac{\sinh(\alpha)}{\cosh(\alpha)};\quad \coth(\alpha)=\frac{1}{\tanh(\alpha)}=\frac{\cosh(\alpha)}{\sinh(\alpha)}$$

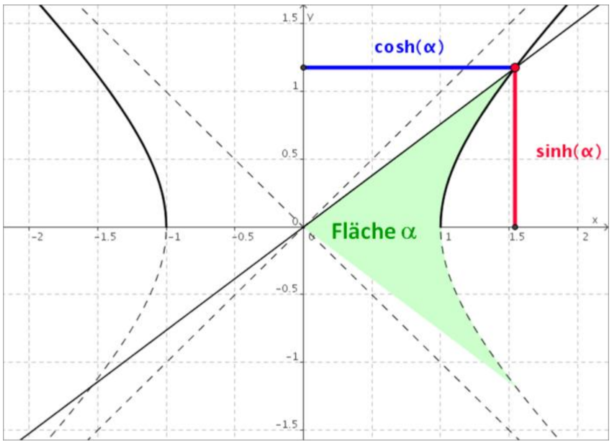
1. Summensatz:

$$\sinh(\alpha\pm\beta)=\sinh(\alpha)\cdot\cosh(\beta)\pm\cosh(\alpha)\cdot\sinh(\beta)$$

speziell: $\sinh(2\alpha)=2\cdot\sinh(\alpha)\cdot\cosh(\beta)$

$$\cosh(\alpha\pm\beta)=\cosh(\alpha)\cdot\cosh(\beta)\pm\sinh(\alpha)\cdot\sinh(\beta)$$

speziell: $\cosh(2\alpha)=\cosh^2(\alpha)+\sinh^2(\alpha)$



Sinushyp.: $f: y=\sinh(x)$, $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – Areasinushyp.: $f^{-1}: y=arsinh(x)$, $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Kosinushyp.: $f: y=\cosh(x)$, $\mathbb{R}\to[1\,;\infty\,]$ – Areakosinushyp.: $f^{-1}: y=arcosh(x)$, $[1\,;\infty\,]\to\mathbb{R}_0^+$

Tangenshyp.: $f: y=\tanh(x)$, $\mathbb{R}\to\,]-1;1[$ – Areatangenshyp.: $f^{-1}: y=artanh(x)$, $]-1;1[\,\to\mathbb{R}$

Zusammenhang mit Exponential- und Logarithmusfunktionen:

$$\cosh(x)+\sinh(x)=e^x$$

$$\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2};\quad \cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2};\quad \tanh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}};\quad \coth(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

$$arsinh(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right);\quad arcosh(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right);\quad artanh(x)=\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right);\quad arcoth(x)=\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

Zusammenhang zwischen Hyperbelfunktionen und Winkelfunktionen mit imaginären Argumenten:

$$\sin(j\cdot b)=j\cdot\sinh(b);\quad \cos(j\cdot b)=\cosh(b);\quad \tanh(j\cdot b)=j\cdot\tan(b)$$

Zusammenhang zwischen Hyperbelfunktionen und Winkelfunktionen mit komplexen Argumenten:

$$\sin(a+j\cdot b)=\sin(a)\cdot\cosh(b)+j\cdot\cos(a)\cdot\sinh(b);\quad \cos(a+j\cdot b)=\cos(a)\cdot\cosh(b)-j\cdot\sin(a)\cdot\sinh(b)$$

Komplexe Darstellung der Winkelfunktionen mit der Exponentialfunktion:

$$\sin(a)=\frac{e^{j\cdot a}-e^{-j\cdot a}}{2\cdot j};\quad \cos(a)=\frac{e^{j\cdot a}+e^{-j\cdot a}}{2}$$

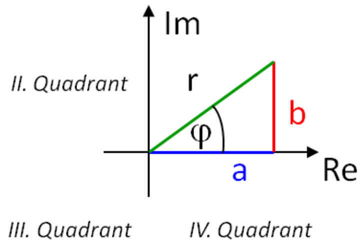
II. Komplexe Zahlen

$j^2 = -1$; j … imaginäre Einheit; $\mathbb{C}$ … Menge der komplexen Zahlen

$z = a + b \cdot j$ … komplexe Zahl in **Komponentenform**; $a \in \mathbb{R}$ … Realteil, $b \in \mathbb{R}$ … Imaginärteil

$z = a + b \cdot j$ und $z^* = a - b \cdot j$ … konjugiert komplexe Zahlen

Darstellung in der **Gauß'schen Zahlenebene**



Polarform – trigonometrische Form: $z = (r; \varphi°)$

Polarform – Exponentialform: $z = r \cdot e^{j \cdot \varphi_{RAD}}$

Umrechnung in Polarform $r = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\varphi = atn\left(\frac{b}{a}\right)$ … Sonderfälle für a = 0 und Quadrant beachten!

Umrechnung in Komponentenform $a = r \cdot \cos(\varphi)$; $b = r \cdot \sin(\varphi)$; somit $z = r \cdot \cos(\varphi) + j \cdot r \cdot \sin(\varphi)$

Euler'sche Formel: $e^{j \cdot \varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)$; $\Rightarrow e^{j \cdot \pi} = -1 \in \mathbb{R}$

Eine Quadratische Gleichung $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ mit negativer Diskriminante $b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0$ besitzt die konjugiert komplexen Lösungen ${}_1x_2 = \frac{-b}{2 \cdot a} \pm \frac{\sqrt{|b^2 - 4 \cdot a \cdot c|}}{2 \cdot a} \cdot j$

Rechnen in Komponentenform (Add., Subtr., Mult., Div.):

$$z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot j$$

$$z = z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \cdot j$$

$$z = z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2) \cdot j\,; \quad z = z_1 \cdot z_1^* = a_1^2 + b_1^2 \in \mathbb{R}$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*} = \frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{-a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2}{a_2^2 + b_2^2} \cdot j$$

Rechnen in Polarform – trigonometrischer Form (Mult., Div., Pot. Exponent n $\in \mathbb{N}$, n-te Wurzel):

$$z = z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2; \varphi_1 + \varphi_2)$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}; \varphi_1 - \varphi_2\right)$$

$$z^n = (r^n; n \cdot \varphi)$$

$$\sqrt[n]{z} = \left(\sqrt[n]{r}; \frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{360°}{n}\right), \; k = 0, \ldots, n-1 \quad \text{(n Lösungen!)}$$

Rechnen in Polarform – Exponentialform (Mult., Div., Pot. mit Exponent $\in \mathbb{C}$, Logarithmieren):

$$z_1^{z_2} = \left(r_1 \cdot e^{j \cdot \varphi_1}\right)^{r_2 \cdot \cos(\varphi_2) + j \cdot r_2 \cdot \sin(\varphi_2)} = \ldots, \quad \Rightarrow j^j = e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0{,}20788 \in \mathbb{R}$$

$$\ln(z) = \ln\left(r \cdot e^{j \cdot \varphi}\right) = \ln(r) + \varphi \cdot j$$

III. Vektoren & Matrizen

1) Vektoren in der Ebene ℝ²

$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}$, Ortsvektor des Punktes A(a_x/a_y)

Betrag (Länge): $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$; Nullvektor $\vec{0}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$; inverser Vektor (Gegenvektor) $-\vec{a}=\begin{pmatrix}-a_x\\-a_y\end{pmatrix}$

Addition, Subtraktion: $\vec{a}\pm\vec{b}=\begin{pmatrix}a_x\pm b_x\\a_y\pm b_y\end{pmatrix}$; Multiplikation mit Skalar λ (Streckung): $\lambda\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}\lambda\cdot a_x\\\lambda\cdot a_y\end{pmatrix}$

Einheitsvektor in Richtung des Vektors $\vec{a}$: $\vec{a}_0=\frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}$; Betrag $|\vec{a}_0|=1$

Mittelpunkt M einer Strecke AB: $\vec{m}=\frac{1}{2}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$; Schwerpunkt S eines Dreiecks ABC: $\vec{s}=\frac{1}{3}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\varphi)\in\mathbb{R}$; $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$

Winkel φ zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$: $\varphi=acs\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\right)$

Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms: $A=\sqrt{\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\varphi)$

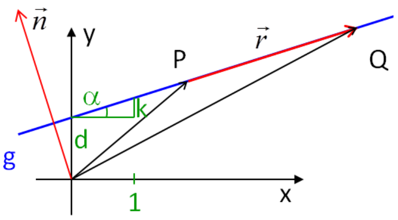
Normalvektoren zu $\vec{a}$: $\vec{n}=\begin{pmatrix}-a_y\\a_x\end{pmatrix}$ und $-\vec{n}=\begin{pmatrix}a_y\\-a_x\end{pmatrix}$

Gerade g durch 2 Punkte P(p_x/p_y), Q(q_x/q_y):

Parameterform von $g:\vec{x}=\vec{p}+\lambda\cdot\vec{r}$, mit Richtungsvektor $\vec{r}=\vec{PQ}=\begin{pmatrix}q_x-p_x\\q_y-p_y\end{pmatrix}$

Normalform von $g:(\vec{x}-\vec{p})\cdot\vec{n}=0$, wobei $\vec{n}\perp\vec{r}$

Lineare Funktion $g: y=k\cdot x+d$, Steigung k, Steigungswinkel $\alpha=atn(k)$



2) Vektoren im Raum ℝ³

$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}$, Ortsvektor des Punktes A(a_x/a_y/a_z)

Betrag (Länge): $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$; Nullvektor $\vec{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$; inverser Vektor (Gegenvektor) $-\vec{a}=\begin{pmatrix}-a_x\\-a_y\\-a_z\end{pmatrix}$

Addition, Subtraktion: $\vec{a}\pm\vec{b}=\begin{pmatrix}a_x\pm b_x\\a_y\pm b_y\\a_z\pm b_z\end{pmatrix}$; Multiplikation mit Skalar λ (Streckung): $\lambda\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}\lambda\cdot a_x\\\lambda\cdot a_y\\\lambda\cdot a_z\end{pmatrix}$

Einheitsvektor in Richtung des Vektors $\vec{a}$: $\vec{a}_0=\frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}$, Betrag $|\vec{a}_0|=1$

Mittelpunkt M einer Strecke AB: $\vec{m}=\frac{1}{2}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$; Schwerpunkt S eines räuml. Dreiecks ABC: $\vec{s}=\frac{1}{3}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\varphi)\in\mathbb{R}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$

Winkel φ zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$: $\varphi=acs\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\right)$

Vektorprodukt $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_y\cdot b_z-a_z\cdot b_y\\-(a_x\cdot b_z-a_z\cdot b_x)\\a_x\cdot b_y-a_y\cdot b_x\end{pmatrix}$, $\vec{c}\perp\vec{a}\wedge\vec{c}\perp\vec{b}$; $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\varphi)$; $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

Volumen des von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Tetraeders: $V=\frac{1}{6}\cdot\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right|$

Gerade g durch 2 Raumpunkte $P(p_x/p_y/p_z)$, $Q(q_x/q_y/q_z)$:

Parameterform von $g:\vec{x}=\vec{p}+\lambda\cdot\vec{r}$, mit Richtungsvektor $\vec{r}=\vec{PQ}=\begin{pmatrix}q_x-p_x\\q_y-p_y\\q_z-p_z\end{pmatrix}$

Ebene ε durch 3 Raumpunkte $P(p_x/p_y/p_z)$, $Q(q_x/q_y/q_z)$, $R(r_x/r_y/r_z)$:

Parameterform von $\varepsilon:\vec{x}=\vec{p}+\lambda\cdot\vec{r}_1+\mu\cdot\vec{r}_2$, mit Richtungsvektoren $\vec{r}_1=\vec{PQ}=\begin{pmatrix}q_x-p_x\\q_y-p_y\\q_z-p_z\end{pmatrix}$, $\vec{r}_2=\vec{PR}=\begin{pmatrix}r_x-p_x\\r_y-p_y\\r_z-p_z\end{pmatrix}$

Normalform von $\varepsilon:(\vec{x}-\vec{p})\cdot\vec{n}=0$, wobei $\vec{n}=\vec{r}_1\times\vec{r}_2$

3) Matrizen

$m\times n-Matrix\ A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix}$; quadratische Matrix: $m=n$

Transponierte Matrix $A^T=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\dots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\dots&a_{m2}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{1n}&a_{2n}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix}$; Einheitsmatrix (quadratisch): $E=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&1&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&1\end{pmatrix}$

Addition, Subtraktion: $A\pm B=\begin{pmatrix}a_{11}\pm b_{11}&a_{12}\pm b_{12}&\dots&a_{1n}\pm b_{1n}\\a_{21}\pm b_{21}&a_{22}\pm b_{22}&\dots&a_{2n}\pm b_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{m1}\pm b_{m1}&a_{m2}\pm b_{m2}&\dots&a_{mn}\pm b_{mn}\end{pmatrix}$

Multiplikation nur möglich, wenn Spaltenzahl von A = Zeilenzahl von B „$(m\times p)\cdot(p\times n)=(m\times n)$“.
Nicht kommutativ! Berechnung: Skalarprodukte der Zeilen von A mit den Spalten von B (*„Zeilen × Spalten“*):

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\\b_{31}&b_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}+a_{13}\cdot b_{31}&a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22}+a_{13}\cdot b_{32}\\a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21}+a_{23}\cdot b_{31}&a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22}+a_{23}\cdot b_{32}\\a_{31}\cdot b_{11}+a_{32}\cdot b_{21}+a_{33}\cdot b_{31}&a_{31}\cdot b_{12}+a_{32}\cdot b_{22}+a_{33}\cdot b_{32}\end{pmatrix}$$

Determinante einer Matrix A:

$\det(A) \neq 0$ … reguläre Matrix A, $\det(A) = 0$ … singuläre Matrix A

2×2-Matrix: $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

3×3-Matrix: $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$

n×n-Matrizen: Überführen in Dreiecksmatrix, Determinante = Produkt der Elemente der Hauptdiagonale

Inverse Matrix A^{-1}:

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

2×2-Matrix: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

3×3-Matrix: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} & -(a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{13}) & a_{12} \cdot a_{23} - a_{22} \cdot a_{13} \\ -(a_{21} \cdot a_{33} - a_{31} \cdot a_{23}) & a_{11} \cdot a_{33} - a_{31} \cdot a_{13} & -(a_{11} \cdot a_{23} - a_{21} \cdot a_{13}) \\ a_{21} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{22} & -(a_{11} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{12}) & a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \end{pmatrix}$

n×n-Matrizen: Gauß-Jordan-Verfahren (A → E, E → A^{-1})

Lineare Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{l} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + \ldots + a_{1n} \cdot z = b_1 \\ a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + \ldots + a_{2n} \cdot z = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1} \cdot x + a_{n2} \cdot y + \ldots + a_{nn} \cdot z = b_n \end{array}$$

, Matrixschreibweise: $A \cdot \vec{x} = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ \ldots \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$

Eindeutige Lösung wenn $\det(A) \neq 0$: $\vec{x} = A^{-1} \cdot B$

Drehmatrizen:

Drehung Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ um Winkel α: $\vec{a}_\angle = D \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$, α > 0 … gegen Uhrzeigersinn

Drehung Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ um Winkel α um die x-Achse: $\vec{a}_{\angle x} = D_x \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$

Drehung Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ um Winkel β um die y-Achse: $\vec{a}_{\angle y} = D_y \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$

Drehung Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ um Winkel γ um die z-Achse: $\vec{a}_{\angle z} = D_z \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$

Eigenwerte, Eigenvektoren einer Matrix A:

Eigenwertproblem:
zu einer quadratischen n×n-Matrix A eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ (Eigenwert) und einen Vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ (Eigenvektor) so zu finden, dass die Eigenwertgleichung $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$ - umgeformt $(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$ - erfüllt ist.
Falls Matrix A symmetrisch: alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{R}$.

Notwendige Bedingung: charakteristische Matrix $(A - \lambda \cdot E)$ ist singulär. Jede reelle oder komplexe Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E) = 0$ ist ein Eigenwert.

Der zu einem Eigenwert λ_i gehörige Eigenvektor $\vec{x}_i$ ist die Lösung der Gleichung $(A - \lambda_i \cdot E) \cdot \vec{x}_i = \vec{0}$.

Beispiel 1:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda \cdot E) = \left| \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 1 \\ 3 & 1-\lambda & 3 \\ -5 & 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = -\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda = 0$$

$\Rightarrow$ Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2 \in \mathbb{R}$

Eigenvektoren $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$:

$$(A - 0 \cdot E) \cdot \vec{x}_1 = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2x_1 - 3y_1 + 1z_1 = 0 \\ 3x_1 + 1y_1 + 3z_1 = 0 \\ -5x_1 + 2y_1 - 4z_1 = 0 \end{matrix} \Rightarrow x_1 = 10, y_1 = 3, z_1 = -11 \Leftrightarrow \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$(A - 1 \cdot E) \cdot \vec{x}_2 = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2-1 & -3 & 1 \\ 3 & 1-1 & 3 \\ -5 & 2 & -4-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 1x_2 - 3y_2 + 1z_2 = 0 \\ 3x_2 + 0y_2 + 3z_2 = 0 \\ -5x_2 + 2y_2 - 5z_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow x_2 = -1, y_2 = 0, z_2 = 1 \Leftrightarrow \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - (-2) \cdot E) \cdot \vec{x}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2+2 & -3 & 1 \\ 3 & 1+2 & 3 \\ -5 & 2 & -4+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 4x_3 - 3y_3 + 1z_3 = 0 \\ 3x_3 + 3y_3 + 3z_3 = 0 \\ -5x_3 + 2y_3 - 2z_3 = 0 \end{matrix} \Rightarrow x_3 = 4, y_3 = 3, z_3 = -7 \Leftrightarrow \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda \cdot E) = \left| \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \right| = \ldots = \lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0 \Rightarrow {}_1\lambda_2 = 3 \pm \sqrt{9-10}$$

$\Rightarrow$ Eigenwerte $\lambda_1 = 3 + j$, $\lambda_2 = 3 - j \in \mathbb{C}$

Eigenvektoren $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$:

$$(A - (3+j) \cdot E) \cdot \vec{x}_1 = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-j & 1 \\ -2 & -1-j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} (1-j)x_1 + 1y_1 = 0 \\ -2x_1 + (-1-j)y_1 = 0 \end{matrix} {}^{*}\Rightarrow x_1 = 1, y_1 = -1 + j \Leftrightarrow \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+j \end{pmatrix}$$

$$(A - (3-j) \cdot E) \cdot \vec{x}_2 = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+j & 1 \\ -2 & -1+j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} (1+j)x_2 + 1y_2 = 0 \\ -2x_2 + (-1+j)y_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow x_2 = 1, y_2 = -1 - j \Leftrightarrow \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-j \end{pmatrix}$$

* linear abhängige Gleichungen [II] = [I] *(-1-j); x_1 und y_1 aus Gleichung [I] ablesen; analog beim zweite Eigenvektor

IV. Differentialrechnung

1) Grundlagen

Funktion $f: y = f(x)$

Erste Ableitung von f: $f': y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$ *(momentaner Anstieg - „Steigung der Tangente")*

Zweite Ableitung von f: $f'': y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$ *(momentane Änderung des Anstiegs - „Krümmung")*

n - te Ableitung von f: $f^{(n)}: y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$

$f: y = f(t)$, Schreibweise für Ableitung nach der Variablen t: $\dot{f}: \dot{y} = \dot{f}(t) = \frac{dy}{dt}$, $\ddot{f}: \ddot{y} = \ddot{f}(t) = \frac{d^2y}{dt^2}$

Ableitungsregeln (Differentiationsregeln):

Potenzfunktion: $y = x^n \Rightarrow y' = n \cdot x^{n-1}$

$y = c \Rightarrow y' = 0$ … Konstantenregel (*Ableitung einer Konstanten ist gleich 0)*

$y = a \cdot f(x) \Rightarrow y' = a \cdot f'(x)$ … Faktorregel *(konstanter Faktor bleibt erhalten)*

$y = u(x) \pm v(x) \Rightarrow y' = u'(x) \pm v'(x)$ … Summenregel *(Summanden einzeln Differenzieren)*

$y = u(v(x)) \Rightarrow y' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$ … Kettenregel *(äußere $\times$ innere Ableitung)*

$y = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ … Produktregel

$y = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow y' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$ … Quotientenregel

Winkelfunktionen: $y = \sin(x) \Rightarrow y' = \cos(x)$; $y = \cos(x) \Rightarrow y' = -\sin(x)$; $y = \tan(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

Arkusfunktionen: $y = asn(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $y = acs(x) \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $y = atn(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$

Exponentialfunktionen: $y = e^x \Rightarrow y' = e^x$; $y = a^x \Rightarrow y' = a^x \cdot \ln(a)$

Logarithmusfunktionen: $y = \ln(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$; $y = \lg(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{x \cdot \ln(10)}$; $y = \log_a(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$

Logarithmisches Differenzieren: $y = u(x)^{v(x)} \Rightarrow y' = u(x)^{v(x)} \cdot \left(v'(x) \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)} \right)$

Steigung & Krümmung einer Funktion f: y = f(x) an der Stelle x_0:

Steigung: $k = f'(x_0)$; Steigungswinkel $\alpha = atn(k)$

Krümmung: $\kappa = \frac{f''(x_0)}{\left(1 + f'^2(x_0)\right)^{\frac{3}{2}}}$; Krümmungskreisradius $\rho = \frac{1}{|\kappa|}$

$\kappa > 0$ … Linkskrümmung (konkav), $\kappa < 0$ … Rechtskrümmung (konvex)

2) Anwendungen der Differentialrechnung

Bewegungsgleichung:

Weg s abhängig von der Zeit t: $s = s(t)$

Geschwindigkeit v: $v(t) = \dot{s}(t) = \frac{ds}{dt}$

Beschleunigung a: $a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t) = \frac{d^2 s}{dt^2}$

Kurvenuntersuchung (Kurvendiskussion):

1) Definitionsmenge von f: y = f(x); Ableitungen f', f'', f'''
2) Nullstellen x_N der Funktion f: **y = f(x) = 0**
3) Lokale Extremstellen x_E von f: **y' = f'(x) = 0**
4) Krümmung in den Extremstellen: $f''(x_E) < 0 \Leftrightarrow$ lokales Maximum, Hochpunkt H(x_E / $f(x_E)$)
   $f''(x_E) > 0 \Leftrightarrow$ lokales Minimum, Tiefpunkt T(x_E / $f(x_E)$)
   $f''(x_E) = 0$ und $f'''(x_E) \neq 0 \Leftrightarrow$ Sattelpunkt S(x_E / $f(x_E)$)
   $f''(x_E) = 0$ und $f'''(x_E) = 0 \Leftrightarrow$ Flachpunkt F(x_E / $f(x_E)$)
5) Lokale Wendestellen x_W von f: **y'' = f''(x) = 0**
   $f'''(x_W) \neq 0 \Leftrightarrow$ Wendepunkt W(x_W / $f(x_W)$)
   $f'''(x_W) = 0 \Leftrightarrow$ Flachpunkt F(x_W / $f(x_W)$)
6) Asymptoten; Wendetangenten t_w: $y = k_w \cdot x + d$; Wertetabelle; Graph; ...

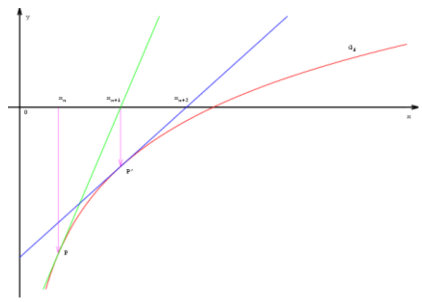
Nullstellensuche bei f(x) mit dem **Newton'schen Näherungsverfahren:**

erste Ableitung von f bilden: f': y' = f'(x), Schätzwert x_0 (kein Extremum zwischen x_0 und Nullstelle!)

Erste Näherung: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

Zweite Näherung: $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

n-te Näherung: $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$

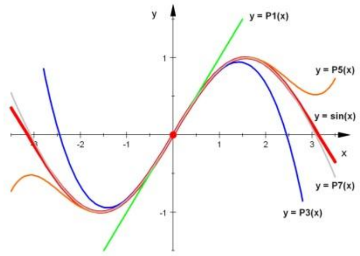


Taylorreihen von f(x) im Entwicklungspunkt x_0:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$, Fakultät $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \ldots$, $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \ldots$ in $x_0 = 0$



Extremwertaufgaben:

1. Hauptbedingung aufstellen (was soll maximal / minimal werden?)
2. Nebenbedingungen aufstellen und in Hauptbedingung einsetzen $\Rightarrow$ Zielfunktion
3. Erste Ableitung der Zielfunktion gleich 0 setzen $\Rightarrow$ Extremstellen (auf Sinnhaftigkeit prüfen!)
4. Extremstellen in zweite Ableitung einsetzen $\Rightarrow$ Maximum oder Minimum

V. Integralrechnung

1) Grundlagen

Eine Stammfunktion F(x) von f(x) ist eine Funktion, deren Ableitung F'(x) = f(x) ist.

Unbestimmtes Integral … Menge aller Stammfunktionen: $\int f(x)dx = F(x)+c$

Bestimmtes Integral zwischen den Grenzen a und b: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b = F(b)-F(a)$ *„Flächenberechnung"*

Integrationsregeln:

Potenzfunktion $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c \quad für\ n \neq -1$, $\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+c$

$\int 0\,dx = c$ … *nur Integrationskonstante*

$\int a\cdot f(x)\,dx = a\cdot\int f(x)\,dx$ … Faktorregel *(konstanter Faktor bleibt erhalten)*

$\int f(x)\pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ … Summenregel *(Summanden einzeln Integrieren)*

$\int f(g(x))dx = \int f(u)\cdot\frac{du}{g'(x)} \quad mit\ Substitution\ u=g(x) \Rightarrow \frac{du}{dx}=g'(x) \Rightarrow dx = \frac{du}{g'(x)}$ … Substitutionsmethode

$\int f(x)\cdot g(x)dx = F(x)\cdot g(x) - \int F(x)\cdot g'(x)dx \quad wobei\ F(x)=\int f(x)dx$ … partielle Integration

Winkelfunktionen: $\int \sin(x)dx = -\cos(x)+c$; $\int \cos(x)dx = \sin(x)+c$; $\int \tan(x)dx = -\ln|\cos(x)|+c$

Exponentialfunktionen: $\int e^x\,dx = e^x+c$; $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln(a)}+c$

Logarithmusfunktionen: $\int \ln(x)\,dx = x\cdot\ln(x)-x+c \ mit\ x>0$; $\int \lg(x)\,dx = \frac{x\cdot\ln(x)-x}{\ln(10)}+c\ mit\ x>0$

Speziell: $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = atn(x)+c$; $\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = artanh(x)+c \ \ für\ |x|<1$; $\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = arcoth(x)+c \ \ für\ |x|>1$

$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = arsinh(x)+c$; $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = asn(x)+c \ \ für\ |x|<1$; $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = arcosh(x)+c \ \ für\ |x|>1$

Polynomdivision & Partialbruchzerlegung:

Beispiel:

$$\int \frac{2x^5+3x^4+4x^3-6x^2-9x-18}{2x^4-x^3-6x^2}dx = \text{(Polynomdivision bei Grad Zähler} \geq \text{Grad Nenner)}$$

$$= \int 2+x+\frac{12x^3+6x^2-9x-18}{2x^4-x^3-6x^2}dx = \text{(Partialbruchzerlegung des Restes, Ansatz über Nullstellen des Nenners)}$$

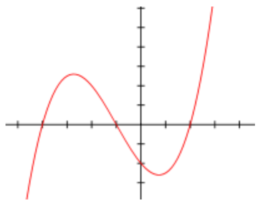
$$= \int 2+x+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{3}{x-2}+\frac{4}{2x+3}dx =$$

$$= 2x+\frac{x^2}{2}+\ln|x|-\frac{3}{x}+3\cdot\ln|x-2|+2\cdot\ln|2x+3|+c$$

2) Anwendungen der Integralrechnung

Fläche zwischen y = f(x) und x-Achse:

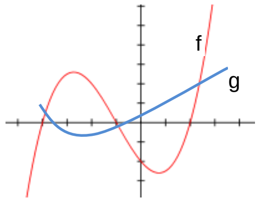
$A = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx$



$A = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx + \left|\int_{x_2}^{x_3} y\,dx\right|$ x_1, x_2, x_3 … Nullstellen

Fläche zwischen y_f = f(x) und y_g = g(x):

$A = \int_{x_1}^{x_2} (y_f - y_g) dx$



$A = \int_{x_1}^{x_2} (y_f - y_g)\,dx + \left|\int_{x_2}^{x_3} (y_f - y_g)\,dx\right|$ x_1, x_2, x_3 … Schnittstellen

Bogenlänge von y = f(x):

$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\,dx$ $y' = \frac{dy}{dx}$

Schwerpunkt einer Fläche zwischen y = f(x) und x-Achse: *„Flächenschwerpunkt“*

$A = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx$

$M_y = \int_{x_1}^{x_2} (x \cdot y\,) dx$

$M_x = \frac{1}{2} \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx$ $S\left(\frac{My}{A}\middle|\frac{Mx}{A}\right)$

Schwerpunkt einer Fläche zwischen y_f = f(x) und y_g = g(x): *„Flächenschwerpunkt“*

$$A = \int_{x_1}^{x_2} (y_f - y_g) dx$$

$M_y = \int_{x_1}^{x_2} \left(x \cdot (y_f - y_g)\right)\,dx$

$M_x = \frac{1}{2} \cdot \int_{x_1}^{x_2} (y_f^2 - y_g^2)\,dx$ $S\left(\frac{My}{A}\middle|\frac{Mx}{A}\right)$

Schwerpunkt eines Kurvenstücks y = f(x): *„Linienschwerpunkt“*

$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\,dx$ $y' = \frac{dy}{dx}$

$M_y = \int_{x_1}^{x_2} \left(x \cdot \sqrt{1 + y'^2}\right)\,dx$

$M_x = \int_{x_1}^{x_2} \left(y \cdot \sqrt{1 + y'^2}\right)\,dx$ $S\left(\frac{My}{s}\middle|\frac{Mx}{s}\right)$

Volumen bei Rotation von y = f(x) um x – Achse / um y- Achse:

$V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 \, dx$

$V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 \, dy$ x explizit, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$

Oberflächeninhalt bei Rotation von y = f(x) um x – Achse / um y- Achse:

$O_x = 2\pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} \left(y \cdot \sqrt{1 + y'^2} \right) dx$ $y' = \frac{dy}{dx}$

$O_y = 2\pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} \left(x \cdot \sqrt{1 + x'^2} \right) dy$ x explizit, $x' = \frac{dx}{dy}$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$

Körperschwerpunkt bei Rotation von y = f(x) um x – Achse / um y- Achse:

$V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 \, dx$

$M_{yz} = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} (x \cdot y^2) dx$ $S\left(\frac{Myz}{V_x} \mid 0 \mid 0 \right)$

$V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 \, dy$ x explizit, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$

$M_{xz} = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} (y \cdot x^2) dy$ $S\left(0 \,\middle|\, \frac{Mxz}{V_y} \mid 0 \right)$

Mantelschwerpunkt bei Rotation von y = f(x) um x – Achse / um y- Achse:

$O_x = 2\pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} \left(y \cdot \sqrt{1 + y'^2} \right) dx$ $y' = \frac{dy}{dx}$

$M_{yz} = 2\pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} \left(x \cdot y \cdot \sqrt{1 + y'^2} \right) dx$ $S\left(\frac{Myz}{O_x} \mid 0 \mid 0 \right)$

$O_y = 2\pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} \left(x \cdot \sqrt{1 + x'^2} \right) dy$ x explizit, $x' = \frac{dx}{dy}$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$

$M_{xz} = 2\pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} \left(y \cdot x \cdot \sqrt{1 + x'^2} \right) dy$ $S\left(0 \,\middle|\, \frac{Mxz}{O_y} \mid 0 \right)$

Guldin‘sche Regeln:

$V_x = 2 \cdot \pi \cdot y_0 \cdot A$ $V_y = 2 \cdot \pi \cdot x_0 \cdot A$

Volumen Drehkörper = Weg des Flächenschwerpunkts S (x_0 | y_0) bei einer Umdrehung $\times$ Flächeninhalt A der rotierenden Fläche

$O_x = 2 \cdot \pi \cdot y_0 \cdot s$ $O_y = 2 \cdot \pi \cdot x_0 \cdot s$

Oberfläche Drehkörper = Weg des Linienschwerpunkts S (x_0 | y_0) bei einer Umdrehung $\times$ Länge s des rotierenden Kurvenstücks

Flächenschwerpunk Vielecke (n>= 3 Ecken):

$$A=\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n} x_k\cdot y_{k+1}-x_{k+1}\cdot y_k \qquad wobei\ n+1 \Leftrightarrow 1$$

$$M_y=\frac{1}{6}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(x_k\cdot y_{k+1}-x_{k+1}\cdot y_k\right)\cdot\left(x_k+x_{k+1}\right)$$

$$M_x=\frac{1}{6}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(x_k\cdot y_{k+1}-x_{k+1}\cdot y_k\right)\cdot\left(y_k+y_{k+1}\right) \qquad S\left(\frac{My}{A}\middle|\frac{Mx}{A}\right)$$

Flächenschwerpunk zusammengesetzter Flächen:
Flächenschwerpunkte $S_1 (x_1 / y_1)$, $S_2 (x_2 / y_2)$, ..., $S_n (x_n / y_n)$; Flächeninhalte A_1, A_2, ..., A_n

$$x_s=\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(x_k\cdot A_k\right)}{\sum_{k=1}^{n}A_k} \qquad y_s=\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(y_k\cdot A_k\right)}{\sum_{k=1}^{n}A_k}$$

S (x_s / y_s)

Linienschwerpunk zusammengesetzter Linien:
Linienschwerpunkte $S_1 (x_1 / y_1)$, $S_2 (x_2 / y_2)$, ..., $S_n (x_n / y_n)$; Bogenlängen s_1, s_2, ..., s_n

$$x_s=\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(x_k\cdot s_k\right)}{\sum_{k=1}^{n}s_k} \qquad y_s=\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(y_k\cdot s_k\right)}{\sum_{k=1}^{n}s_k}$$

S (x_s / y_s)

Trägheitsmoment eines Drehkörpers (Massenmoment zweiten Grades):

Schwereachse = Drehachse = x-Achse: $J_x=\frac{\pi\cdot\rho}{2}\cdot\int_{x_1}^{x_2}y^4dx \qquad \rho=\frac{m}{V_x}$

Schwereachse || Drehachse = x-Achse (Abstand a_y): $J_{s_x}=J_x-m\cdot a_y^2$

Schwereachse = Drehachse = y-Achse: $J_Y=\frac{\pi\cdot\rho}{2}\cdot\int_{Y_1}^{Y_2}x^4dy \qquad \rho=\frac{m}{V_y}$

Schwereachse || Drehachse = y-Achse (Abstand a_x): $J_{s_y}=J_y-m\cdot a_x^2$

Flächenträgheitsmoment (Flächenmoment zweiten Grades):

$I_x=\frac{1}{3}\cdot\int_{x_1}^{x_2}y^3dx \qquad I_y=\int_{x_1}^{x_2}x^2\cdot y\,dx$ bezüglich der x-Achse, y-Achse

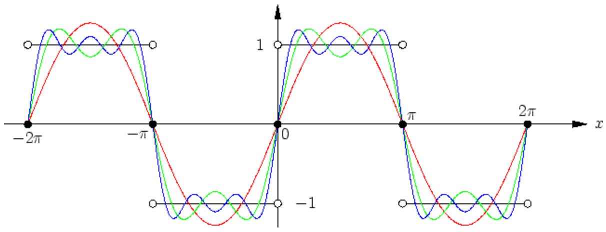
$I_{s_x}=I_x-A\cdot y_s^2 \qquad I_{s_y}=I_y-A\cdot x_s^2$ bezüglich Schwerelinien durch S (x_s / y_s)

Zusammengesetzte Flächen: $I_x=I_{s_{x1}}+A_1\cdot y_{s_1}^2+I_{s_{x2}}+A_2\cdot y_{s_2}^2+\ldots$

$I_y=I_{s_{y1}}+A_1\cdot x_{s_1}^2+I_{s_{y2}}+A_2\cdot x_{s_2}^2+\ldots$

3) Fourierreihen

Funktion f(x) mit Periode p = 2π:



$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x)\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\cos(n\cdot x)dx$$ falls f(x) ungerade (symmetrisch Ursprung): $a_n = 0$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\sin(n\cdot x)dx$$ falls f(x) gerade (symmetrisch y-Achse): $b_n = 0$

Funktion f(t) mit Periode p = T:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cdot \cos\left(n\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right) + b_n \cdot \sin\left(n\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\right]$$ oft $\omega = \frac{2\pi}{T}$

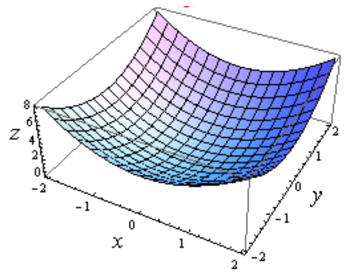
$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T} f(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^{T} f(t)\cdot\cos\left(n\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)dt$$ falls f(x) ungerade (symmetrisch Ursprung): $a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^{T} f(t)\cdot\sin\left(n\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)dt$$ falls f(x) gerade (symmetrisch y-Achse): $b_n = 0$

VI. Funktionen in zwei unabhängigen Variablen

Räumliche Funktion: z = f(x, y), $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



Partielle Ableitung von f nach x: $f_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$

Partielle Ableitung von f nach y: $f_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$

Tangentialebene in einem Punkt [x_0, y_0, z_0= f(x_0, y_0)]: $z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$

Notwendige Bedingung für ein lokales Extremum im Punkt (x_0, y_0, z_0): $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$

Lokales Maximum: $f_{xx}(x_0,y_0) < 0,\ f_{yy}(x_0,y_0) < 0,\ f_{xx}(x_0,y_0)\cdot f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}^2(x_0,y_0) < 0$

Lokales Minimum: $f_{xx}(x_0,y_0) > 0,\ f_{yy}(x_0,y_0) > 0,\ f_{xx}(x_0,y_0)\cdot f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}^2(x_0,y_0) > 0$

Sattelpunkt: $f_{xx}(x_0,y_0)\cdot f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}^2(x_0,y_0) < 0$ wobei $f_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$, $f_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$, ...

Volumen des von der x-y-Ebene und der Funktion z = f(x, y) begrenzten Körpers (Basisechteck x_1, x_2, y_1, y_2):

$$V = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

VII. Funktionen in Polarform

Kreis: $f: r(\varphi) = r_0$ $\varphi \ldots RAD$

Logarithmische Spirale: $f: r(\varphi) = r_0 \cdot e^{b\cdot\varphi}$

Archimedische Spirale: $f: r(\varphi) = a\cdot\varphi + r_0$

Hyperbolische Spirale: $f: r(\varphi) = \frac{a}{\varphi} + r_0$ $\varphi \neq 0$

Blattkurven: $f: r(\varphi) = a\cdot\sin(n\cdot\varphi)$

Kardioide (Herzkurve): $f: r(\varphi) = a\cdot(1+\cos(\varphi))$

Lemniskate: $f: r(\varphi) = a\cdot\sqrt{\cos(2\varphi)}$ D !

Strophoide: $f: r(\varphi) = a\cdot\frac{\cos(2\varphi)}{\cos(\varphi)}$

Zissoide: $f: r(\varphi) = a\cdot\sin(\varphi)\cdot\tan(\varphi)$

'Steigung': $\tau = \angle$*(Polstrahl, Kurventangente)* $\tau \ldots DEG$

$$\tau(\varphi) = atn\left(\frac{r(\varphi)}{r'(\varphi)}\right),\quad \tau(\varphi) = 90^\circ \text{ bei } r'(\varphi) = 0 \qquad r' = \frac{dr(\varphi)}{d\varphi}$$

Krümmung:

$$\kappa(\varphi) = \frac{r^2(\varphi) + 2\cdot r'^2(\varphi) - r(\varphi)\cdot r''(\varphi)}{\left(r'^2(\varphi) + r^2(\varphi)\right)^{3/2}}$$

Sektorfläche:

$$A = \frac{1}{2}\cdot\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\,d\varphi$$

Länge eines Kurvenbogens:

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\,d\varphi$$

VIII. Funktionen in Parameterdarstellung

Ellipse: $f: t \to \begin{cases} x(t) = a \cdot \cos(t) \\ y(t) = b \cdot \sin(t) \end{cases}$

Hyperbel: $f: t \to \begin{cases} x(t) = a \cdot \cosh(t) \\ y(t) = b \cdot \sinh(t) \end{cases}$

Zykloide: Kreis (Radius r) rollt auf einer Geraden ab

$$f: t \to \begin{cases} x(t) = r \cdot (t - a \cdot \sin(t)) \\ y(t) = r \cdot (1 - a \cdot \cos(t)) \end{cases}$$

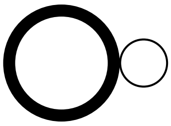
Rollkurven:

a = 1 gespitzt

a < 1 gestreckt

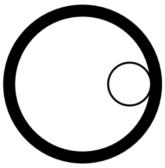
a > 1 geschlungen

Epitrochoide (Aufradlinie): Kreis (Radius r_2) rollt außen auf einem Kreis (Radius r_1)ab



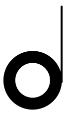
$$f: t \to \begin{cases} x(t) = (r_1 + r_2) \cdot \cos(t) - a \cdot r_2 \cdot \cos\left(\dfrac{r_1 + r_2}{r_2} \cdot t\right) \\ y(t) = (r_1 + r_2) \cdot \sin(t) - a \cdot r_2 \cdot \sin\left(\dfrac{r_1 + r_2}{r_2} \cdot t\right) \end{cases}$$

Hypotrochoide (Inradlinie): Kreis (Radius r_2) rollt innen auf einem Kreis (Radius r_1)ab



$$f: t \to \begin{cases} x(t) = (r_1 - r_2) \cdot \cos(t) + a \cdot r_2 \cdot \cos\left(\dfrac{r_1 - r_2}{r_2} \cdot t\right) \\ y(t) = (r_1 - r_2) \cdot \sin(t) - a \cdot r_2 \cdot \sin\left(\dfrac{r_1 - r_2}{r_2} \cdot t\right) \end{cases}$$

Kreisevolvente: Gerade rollt auf einem Kreis (Radius r) ab



$$f: t \to \begin{cases} x(t) = r \cdot \cos(t) + r \cdot t \cdot \sin(t) \\ y(t) = r \cdot \sin(t) - r \cdot t \cdot \cos(t) \end{cases}$$

Lissajous'sche Figuren: A...Amplituden, ω...Frequenzen, φ...Nullphasenwinkel

$$f: t \to \begin{cases} x(t) = A_x \cdot \sin(\omega_x \cdot t + \varphi_x) \\ y(t) = A_y \cdot \sin(\omega_y \cdot t + \varphi_y) \end{cases}$$

Steigung: $k = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$

$\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$ $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$

Krümmung: $\kappa = \dfrac{\dot{x} \cdot \ddot{y} - \ddot{x} \cdot \dot{y}}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{3/2}}$

Fläche (Kurve, x-Achse): $A = \int_{t_1}^{t_2} (y \cdot \dot{x}) dt$

Sektorfläche: $A = \dfrac{1}{2} \cdot \int_{t_1}^{t_2} (x \cdot \dot{y} - y \cdot \dot{x}) dt$

Länge eines Kurvenbogens: $s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$

IX. Differentialgleichungen

Gleichungen die mindestens eine Ableitung y', y'', $y^{(n)}$ (bzw. einen Differentialquotienten dy/dx) enthalten.

gewöhnlich: Funktion in einer Variablen / *partiell*: Funktionen in mehreren Variablen
Ordnung n: höchste vorkommende Ableitung $y^{(n)}$
Grad: höchste vorkommende Potenz von y und $y^{(n)}$, Grad 1 … linear
variable / *konstante* Koeffizienten von y und $y^{(n)}$
inhomogen / *homogen*: es existiert ein / kein Term s(x), der weder y noch $y^{(n)}$ enthält. *s(x)… „Störfunktion"*
implizit $F(x, y, y',\dots y^{(n)}) = 0$ / explizit $y^{(n)} = f(x, y, y',\dots y^{(n-1)})$

1) Differentialgleichungen 1. Ordnung

Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ führt auf eine partikuläre (spezielle) Lösung $_Ay_p$.

Trennung der Variablen:

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x)\cdot g(y) \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

Beispiel:

$$y' = \frac{dy}{dx} = x\cdot(1+y^2)$$

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int x\cdot dx$$

$$\tan(y) = \frac{x^2}{2} + c$$

$$y = atn\left(\frac{x^2}{2}+c\right)$$

$$Anfangsbedingung\ \ y(0) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = atn\left(\frac{0^2}{2}+c\right) \Rightarrow c = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$_Ay_P = atn\left(\frac{x^2}{2}+1\right)$$

Substitution:

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(a\cdot x + b\cdot y + c),\ u = a\cdot x + b\cdot y + c,\ \frac{du}{dx} = u' = a + b\cdot f(u) \Rightarrow y = \int \frac{du}{a+b\cdot f(u)} = x + c,\ \ Rücksubst.,\ y\ explizit$$

Beispiel:

$$y' = \frac{dy}{dx} = (x+2y+3)^2 \quad Subst: u = x+2y+3 \Rightarrow y' = u^2$$

$$u' = \frac{du}{dx} = 1 + 2y' + 0 = 1 + 2u^2 \Rightarrow (Trennung\ der\ Variablen)\ \frac{du}{1+2u^2} = dx$$

$$\int \frac{du}{1+2u^2} = \int 1dx$$

$$\frac{atn(\sqrt{2}\cdot u)}{\sqrt{2}} = x + \bar{c}$$

$$u = \frac{\tan(\sqrt{2}\cdot x + c)}{\sqrt{2}} \Rightarrow (Rücksubstitution)\ x + 2y + 3 = \frac{\tan(\sqrt{2}\cdot x + c)}{\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{\tan(\sqrt{2}\cdot x + c)}{2\sqrt{2}} - \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$$

Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

$y'+p(x)\cdot y=s(x)$

1) zugehörige homogene Differentialgl. $y'+p(x)\cdot y=0$ durch Trennung der Variablen lösen: $y_H=c\cdot e^{\int -p(x)dx}$
2) Variation der Konstanten c = c(x): $y=c(x)\cdot e^{\int -p(x)dx}$; y' bilden (Produktregel!); y und y' in Dgl. einsetzen
3) c'(x) explizit darstellen; Integrieren $\Rightarrow$ c(x); in Ansatz einsetzen $\Rightarrow$ y_P (partikuläre Lösung)
4) $y = y_H + y_P$
5) ev. Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0 \Rightarrow$ weitere partikuläre Lösung ${}_Ay_p$

Beispiel:

$y'+x\cdot y=3x$

$$1)\, hom.Dgl.\ y'+x\cdot y=0\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-x\cdot y\Rightarrow \int\frac{dy}{y}=\int -xdx\Rightarrow \ln|y|=-\frac{x^2}{2}+\bar{c}\Rightarrow y_H=c\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$2)\, Ansatz:\ y=c(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\Rightarrow y'=c'(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}+c(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot(-x)$$

$$\Rightarrow c'(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}+c(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot(-x)+x\cdot\left(c(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\right)=3x$$

$$3)\, c'(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}=3x\Rightarrow c'(x)=3x\cdot e^{\frac{x^2}{2}}\Rightarrow c(x)=\int 3x\cdot e^{\frac{x^2}{2}}dx=3\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow (Ansatz)\ y_p=3\cdot e^{\frac{x^2}{2}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}=3$$

$$4)\, y=y_H+y_P=c\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}+3$$

$$5)\, Anfangsbedingung\ y(0)=5\Rightarrow 5=c\cdot e^{-\frac{0^2}{2}}+3\Rightarrow c=2\Rightarrow weitere\ partikuläre\ Lösung\ {}_Ay_P=2\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}+3$$

Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstantem Koeffizienten p

$y'+p\cdot y=s(x)$ mit $p\in\mathbb{R}$

1) Lösung der zugehörige homogene Differentialgleichung $y'+p\cdot y=0$: $y_H=c\cdot e^{-p\cdot x}$
2) Lösungsansatz für y_P je nach Bauart der Störfunktion s(x):

$s(x)=a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+\ldots+a_n\cdot x^n$	$y_P=d_0+d_1\cdot x+d_2\cdot x^2+\ldots+d_n\cdot x^n$
$s(x)=a_1\cdot\sin(\omega\cdot x)+a_2\cdot\cos(\omega\cdot x)$	$y_P=d_1\cdot\sin(\omega\cdot x)+d_2\cdot\cos(\omega\cdot x)$ oder $y_P=d\cdot\sin(\omega\cdot x+\varphi)$
$s(x)=a\cdot e^{b\cdot x}$	$y_P=d\cdot e^{b\cdot x}$ *für* $b\neq -p$
	$y_P=d\cdot x\cdot e^{b\cdot x}$ *für* $b=-p$

3) y_P und y_P' in Dgl. einsetzen; d, d_0, d_1 … berechnen (Koeffizientenvergleich) $\Rightarrow$ y_P (partikuläre Lösung)
4) $y = y_H + y_P$
5) ev. Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0 \Rightarrow$ weitere partikuläre Lösung ${}_Ay_p$

Beispiel:

$y'+2\cdot y=3\cdot\sin(4x)$

$$1)\ y_H=c\cdot e^{-2x}$$

$$2)\, Ansatz:\ y_P=d_1\cdot\sin(4x)+d_2\cdot\cos(4x)\Rightarrow y_P'=d_1\cdot\cos(4x)\cdot 4-d_2\cdot\sin(4x)\cdot 4$$

$$3)\, d_1\cdot\cos(4x)\cdot 4-d_2\cdot\sin(4x)\cdot 4+2\cdot(d_1\cdot\sin(4x)+d_2\cdot\cos(4x))=3\cdot\sin(4x)$$

$$(-4d_2+2d_1)\cdot\sin(4x)+(4d_1+2d_2)\cdot\cos(4x)=3\cdot\sin(4x)+0\cdot\cos(4x)$$

$$\Rightarrow \begin{matrix}2d_1-4d_2=3\\4d_1+2d_2=0\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}d_1=0{,}3\\d_2=-0{,}6\end{matrix}\Rightarrow y_P=0{,}3\cdot\sin(4x)-0{,}6\cdot\cos(4x)$$

$$4)\, y=y_H+y_P=c\cdot e^{-2x}+0{,}3\cdot\sin(4x)-0{,}6\cdot\cos(4x)$$

2) Differentialgleichungen 2. Ordnung

Anfangsbedingungen $y(x_0) = y_0$ und $y'(x_0) = y_0'$ führen auf eine partikuläre (spezielle) Lösung ${}_Ay_p$.

Randbedingungen $y(x_0) = y_0$ und $y(x_1) = y_1$ führen auf eine partikuläre (spezielle) Lösung ${}_Ry_p$.

Reduktion der Ordnung durch zweifache Integration:

$$y'' = f(x) \Rightarrow y' = \int f(x)dx + c_1 \Rightarrow y = \int\left(\int f(x)dx\right)dx + c_1 \cdot x + c_2$$

Beispiel:

$$y'' = \frac{3}{x^2} \Rightarrow y' = \int \frac{3}{x^2}dx = -\frac{3}{x} + c_1 \Rightarrow y = \int -\frac{3}{x} + c_1\,dx \Rightarrow y = -3\cdot\ln|x| + c_1 \cdot x + c_2$$

$$\mathit{Anfangsbedingung}: y(1) = 3,\ y'(1) = 2 \Rightarrow \begin{array}{l} 3 = 0 + c_1 + c_2 \\ 2 = -3 + c_1 + 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = 5 \\ c_2 = -2 \end{array}$$

$${}_Ay_P = -3\cdot\ln|x| + 5\cdot x - 2$$

Reduktion der Ordnung durch Substitution:

$y'' = f(y')$, $y'' = f(x,y')$ sind lösbar durch die Substitution $y' = z(x) \Rightarrow y'' = z'$: $y = \int z(x)\,dx + c_2$

Beispiel:

$$y'' = \frac{3\cdot y'}{x} \Rightarrow (\mathit{Sustitution})\ z = y',\ \frac{dz}{dx} = y'' \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{3\cdot z}{x} \Rightarrow (\mathit{Trennung\ der\ Variablen}) \int\frac{dz}{z} = \int\frac{3}{x}dx \Rightarrow \ln|z| = 3\cdot\ln|x| + \bar{c} \Rightarrow z = c\cdot x^3$$

$$y = \int c\cdot x^3 dx = c\cdot\frac{x^4}{4} + c_2 \Rightarrow y = c_1\cdot x^4 + c_2$$

$$\mathit{Randbedingung}: y(1) = 2,\ y(2) = -12 \Rightarrow \begin{array}{l} 2 = c_1 + c_2 \\ -12 = 8c_1 + c_2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = -2 \\ c_2 = 4 \end{array}$$

$${}_Ry_P = -2\cdot x^4 + 4$$

$y'' = f(y)$, $y'' = f(y,y')$ sind lösbar durch die Substitution $y' = z(y(x)) \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dy}z$

Beispiel:

$$y'' = -\frac{1}{y^3} \Rightarrow (\mathit{Sustitution})\ z = y',\ \frac{dz}{dy}\cdot z = y'' \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{dy}\cdot z = -\frac{1}{y^3} \Rightarrow (\mathit{Trennung\ der\ Variablen}) \int z\,dz = \int -\frac{1}{y^3}dy \Rightarrow \frac{z^2}{2} = \frac{1}{2y^2} + \bar{c} \Rightarrow z = \pm\sqrt{\frac{1}{y^2} + c}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{1}{y^2} + c} \Rightarrow (\mathit{Trennung\ der\ Variablen}) \int\frac{y\cdot dy}{\sqrt{1 + c\cdot y^2}} = \int \pm 1dx$$

$$\frac{\sqrt{1 + c\cdot y^2} - 1}{c} = \pm x + \bar{c}_2 \Rightarrow \sqrt{1 + c_1\cdot y^2} = c_1\cdot x + c_2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{(c_1\cdot x + c_2)^2 - 1}{c_1}}$$

$$\mathit{Anfangsbedingung}: y(0) = \pm 2,\ y'(0) = \pm 3 \Rightarrow \begin{array}{l} 4c_1 = c_2^2 - 1 \\ 9\cdot(c_2^2 - 1) = c_1\cdot c_2^2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_2 = \pm 1 \end{array}\ y\ldots n.def.! \vee \begin{array}{l} c_1 = 8{,}75 \\ c_2 = \pm 6 \end{array}$$

$${}_Ay_P = \pm\sqrt{\frac{(8{,}75\cdot x \pm 6)^2 - 1}{8{,}75}} \quad \mathit{Anm.: Hyperbel\ mit}\ M\left(-\frac{24}{35}/0\right)\ \mathit{und\ Hyperbel\ mit}\ M\left(\frac{24}{35}/0\right)$$

Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten p, q

$y''+p\cdot y'+q\cdot y=s(x)$ mit p, q∈ℝ

1) Lösung der zugehörige homogene Differentialgl. $y''+p\cdot y'+q\cdot y=0$:
   Exponentialansatz $y=c\cdot e^{\lambda\cdot x}$ $\Rightarrow$ Charakteristische Gleichung $\lambda^2+p\cdot\lambda+q=0$
   1. Fall: $\lambda_1\neq\lambda_2\in\mathbb{R}$ $\qquad y_H=c_1\cdot e^{\lambda_1\cdot x}+c_2\cdot e^{\lambda_2\cdot x}$
   2. Fall: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda\in\mathbb{R}$ $\qquad y_H=c_1\cdot e^{\lambda\cdot x}+c_2\cdot x\cdot e^{\lambda\cdot x}$
   3. Fall: ${}_1\lambda_2=a\pm b\cdot j\in\mathbb{C}$ $\qquad y_H=c_1\cdot e^{a\cdot x}\cdot\cos(b\cdot x)+c_2\cdot e^{a\cdot x}\cdot\sin(b\cdot x)$
2) Lösungsansatz für y_P je nach Bauart der Störfunktion s(x):
   $s(x)=a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+\ldots+a_n\cdot x^n$ $\qquad y_P=d_0+d_1\cdot x+d_2\cdot x^2+\ldots+d_n\cdot x^n$
   $y_P=d_1\cdot x+d_2\cdot x^2+\ldots+d_n\cdot x^n+d_{n+1}\cdot x^{n+1}$ falls q = 0
   $s(x)=a_1\cdot\sin(\omega\cdot x)+a_2\cdot\cos(\omega\cdot x)$ $\qquad y_P=d_1\cdot\sin(\omega\cdot x)+d_2\cdot\cos(\omega\cdot x)$ oder $y_P=d\cdot\sin(\omega\cdot x+\varphi)$
   $y_P=x\cdot[d_1\cdot\sin(\omega\cdot x)+d_2\cdot\cos(\omega\cdot x)]$ wenn b = ω und a = 0 (Fall 3)
   $s(x)=a\cdot e^{b\cdot x}$ $\qquad y_P=d\cdot e^{b\cdot x}$ wenn $b\neq\lambda_1$ und $b\neq\lambda_2$ (Fall 1)
   $y_P=d\cdot x\cdot e^{b\cdot x}$ wenn $b=\lambda_1$ und $b\neq\lambda_2$ (Fall 1)
   $y_P=d\cdot x^2\cdot e^{b\cdot x}$ wenn b = λ (Fall 2)
3) y_P, y_P‘, y_P‘‘ in Dgl. einsetzen; d, d_0, d_1, … berechnen (Koeffizientenvergleich) $\Rightarrow$ y_P (partikuläre Lösung)
4) $y = y_H + y_P$
5) ev. Anfangsbedingungen $y(x_0) = y_0$ und $y'(x_0) = y_0'$ $\Rightarrow$ weitere partikuläre Lösung ${}_Ay_p$
   ev. Randbedingungen $y(x_0) = y_0$ und $y(x_1) = y_1$ $\Rightarrow$ weitere partikuläre Lösung ${}_Ry_p$

Beispiele:

$y''+4\cdot y'+8\cdot y=29\cdot\sin(3x)$

1) $\lambda^2+4\lambda+8=0\ \Rightarrow\ {}_1\lambda_2=-2\pm 2\cdot j$

$y_H=c_1\cdot e^{-2x}\cdot\cos(2x)+c_2\cdot e^{-2x}\cdot\sin(2x)$

2) $Ansatz\,(a\neq 0\wedge\omega=3\neq b=2)$:

$y_P=d_1\cdot\sin(3x)+d_2\cdot\cos(3x)$

$y_P'=3\cdot d_1\cdot\cos(3x)-3\cdot d_2\cdot\sin(3x)$

$y_P''=-9\cdot d_1\cdot\sin(3x)-9\cdot d_2\cdot\cos(3x)$

3) $-9\cdot d_1\cdot\sin(3x)-9\cdot d_2\cdot\cos(3x)+4\cdot(3\cdot d_1\cdot\cos(3x)-3\cdot d_2\cdot\sin(3x))+8\cdot(d_1\cdot\sin(3x)+d_2\cdot\cos(3x))=29\cdot\sin(3x)$

$(-d_1-12d_2)\cdot\sin(3x)+(12d_1-d_2)\cdot\cos(3x)=29\cdot\sin(3x)+0\cdot\cos(3x)$

$$\Rightarrow\begin{matrix}-d_1-12d_2=29\\12d_1-d_2=0\end{matrix}\ \Rightarrow\begin{matrix}d_1=-0{,}2\\d_2=-2{,}4\end{matrix}\ \Rightarrow y_P=-0{,}2\cdot\sin(3x)-2{,}4\cdot\cos(3x)$$

4) $y=y_H+y_P=c_1\cdot e^{-2x}\cdot\cos(2x)+c_2\cdot e^{-2x}\cdot\sin(2x)-0{,}2\cdot\sin(3x)-2{,}4\cdot\cos(3x)$

$\ddot{y}-6\cdot\dot{y}+9\cdot y=3\cdot t+4\cdot e^{3t}$

1) $\lambda^2-6\lambda+9=0\ \Rightarrow\ \lambda_1=\lambda_2=\lambda=3\ \Rightarrow\ y_H=c_1\cdot e^{3t}+c_2\cdot t\cdot e^{3t}$

2) $Ansatz\,(b=\lambda=3)$:

$y_P=d_0+d_1\cdot t+d_2\cdot t^2\cdot e^{3t}$

$\dot{y}_P=d_1+d_2\cdot\left(2\cdot t\cdot e^{3t}+3\cdot t^2\cdot e^{3t}\right)$

$\ddot{y}_P=d_2\cdot\left(2\cdot e^{3t}+12\cdot t\cdot e^{3t}+9\cdot t^2\cdot e^{3t}\right)$

3) $d_2\cdot\left(2\cdot e^{3t}+12\cdot t\cdot e^{3t}+9\cdot t^2\cdot e^{3t}\right)-6\cdot\left(d_1+d_2\cdot\left(2\cdot t\cdot e^{3t}+3\cdot t^2\cdot e^{3t}\right)\right)+9\cdot\left(d_0+d_1\cdot t+d_2\cdot t^2\cdot e^{3t}\right)=3\cdot t+4\cdot e^{3t}$

$(9d_0-6d_1)+9d_1\cdot t+2d_2\cdot e^{3t}=0+3\cdot t+4\cdot e^{3t}$

$$\Rightarrow\begin{matrix}9d_0-6d_1=0\\9d_1=3\\2d_2=4\end{matrix}\ \Rightarrow\begin{matrix}d_0=2/9\\d_1=1/3\\d_2=2\end{matrix}\ \Rightarrow y_P=2+\frac{1}{3}\cdot t+\frac{2}{9}\cdot t^2\cdot e^{3t}$$

4) $y=y_H+y_P=c_1\cdot e^{3t}+c_2\cdot t\cdot e^{3t}+2+0{,}333\cdot t+0{,}222\cdot t^2\cdot e^{3t}$

Beispiel: frei schwingendes Federpendel (Einmassenschwinger)

$m \cdot \ddot{y} + d \cdot \dot{y} + k \cdot y = 0$ m...Masse, d...Dämpfung/Proportionalitätsfaktor der Reibung, k...Federkonstante/Steifigkeit

$(a)\, m = 30kg,\ (b)\, m = 78{,}125kg,\ (c)\, m = 300kg,\ d = 250kg/s\ bzw.\ Ns/m,\ k = 200N/m,$

$Anfangsbedingungen:\ y(0) = 0 \ldots Anfangsverschieung,\ v_0 = y'(0) = 3m/s \ldots Anfangsgeschwindigkeit$

$$m \cdot \lambda^2 + d \cdot \lambda + k = 0 \Rightarrow {}_1\lambda_2 = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4 \cdot m \cdot k}}{2 \cdot m}$$

$$(Fall\ a)\ d^2 - 4 \cdot m \cdot k > 0:\ y(t) = c_1 \cdot e^{\frac{-d+\sqrt{d^2-4\cdot m\cdot k}}{2\cdot m}\cdot t} + c_2 \cdot e^{\frac{-d-\sqrt{d^2-4\cdot m\cdot k}}{2\cdot m}\cdot t}$$

$$AB \Rightarrow c_2 = -c_1,\ c_1 = \frac{m \cdot v_0}{\sqrt{d^2 - 4 \cdot m \cdot k}}$$

$$y(t) = \frac{m \cdot v_0}{\sqrt{d^2 - 4 \cdot m \cdot k}} \cdot e^{\frac{-d+\sqrt{d^2-4\cdot m\cdot k}}{2\cdot m}\cdot t} - \frac{m \cdot v_0}{\sqrt{d^2 - 4 \cdot m \cdot k}} \cdot e^{\frac{-d-\sqrt{d^2-4\cdot m\cdot k}}{2\cdot m}\cdot t}$$

$$y(t) = 0{,}459 \cdot e^{-0{,}896t} - 0{,}459 \cdot e^{-7{,}437t} \ldots \text{starke Dämpfung, "Kriechfall"}$$

$$(Fall\ b)\ d^2 - 4 \cdot m \cdot k = 0: \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \frac{-d}{2 \cdot m} \Rightarrow\ y(t) = c_1 \cdot e^{\frac{-d}{2\cdot m}\cdot t} + c_2 \cdot t \cdot e^{\frac{-d}{2\cdot m}\cdot t}$$

$$AB \Rightarrow c_1 = 0,\ c_2 = v_0$$

$$y(t) = v_0 \cdot t \cdot e^{\frac{-d}{2\cdot m}\cdot t}$$

$$y(t) = 3t \cdot e^{-1{,}6t} \ldots \text{"aperiodischer Grenzfall"}$$

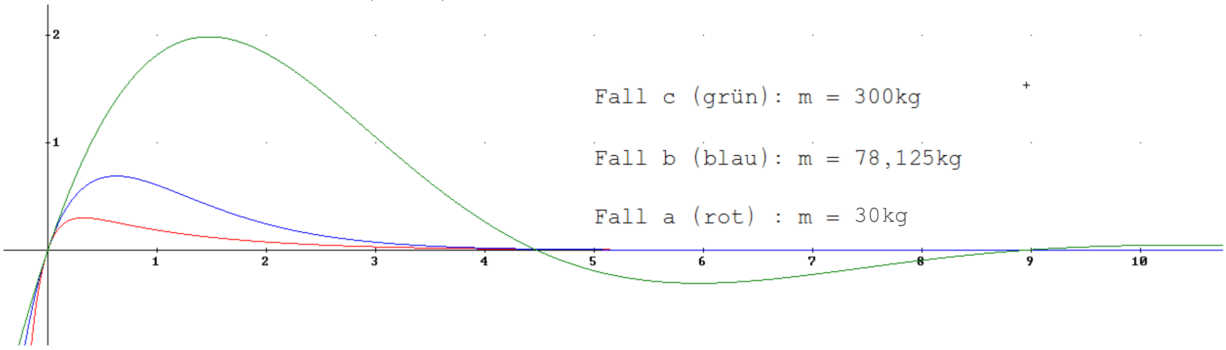
$$(Fall\ c)\ d^2 - 4 \cdot m \cdot k < 0:\ {}_1\lambda_2 = \frac{-d}{2 \cdot m} \pm \frac{\sqrt{|d^2 - 4 \cdot m \cdot k|}}{2 \cdot m} \cdot j$$

$$\Rightarrow\ y(t) = e^{\frac{-d}{2\cdot m}\cdot t} \cdot \left[c_1 \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{|d^2 - 4 \cdot m \cdot k|}}{2 \cdot m} \cdot t \right) + c_2 \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{|d^2 - 4 \cdot m \cdot k|}}{2 \cdot m} \cdot t \right) \right]$$

$$AB \Rightarrow c_1 = 0,\ c_2 = \frac{2 \cdot m \cdot v_0}{\sqrt{|d^2 - 4 \cdot m \cdot k|}}$$

$$y(t) = \frac{2 \cdot m \cdot v_0}{\sqrt{|d^2 - 4 \cdot m \cdot k|}} \cdot e^{\frac{-d}{2\cdot m}\cdot t} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{|d^2 - 4 \cdot m \cdot k|}}{2 \cdot m} \cdot t \right)$$

$$y(t) = 4{,}272 \cdot e^{-0{,}417t} \cdot \sin(0{,}702t) \ldots \text{"gedämpfte Schwingung"}$$



$Sonderfall: d = 0;\ (Rest\ siehe\ oben,\ m = 50kg)$

$$y(t) = \frac{2 \cdot m \cdot v_0}{\sqrt{4 \cdot m \cdot k}} \cdot e^0 \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{4 \cdot m \cdot k}}{2 \cdot m} \cdot t \right) = \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot v_0 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t \right)$$

$$y(t) = 1{,}5 \cdot \sin(4 \cdot t)\ \ldots \text{"ungedämpfte Schwingung"}$$